El Problema de la Mínima Violación Cromática: un estudio poliedral

M. Braga D. Delle Donne J. Marenco
ICI, Universidad Nacional de General Sarmiento

M. Escalante
CONICET - FCEIA, Universidad Nacional de Rosario

M. E. Ugarte M. C. Varaldo
FCEIA, Universidad Nacional de Rosario

Un k-coloreo en un grafo es una partición del conjunto de vértices en k conjuntos estables (esto es, conjuntos de vértices no adyacentes tomados de a pares). El problema de decidir si un grafo dado tiene un k-coloreo o no es NP-Completo, si $k \geq 3$. El problema clásico de coloreo de vértices (VCP) tiene como objetivo encontrar el menor k necesario para que el grafo sea k-coloreable. Este problema tiene muchas aplicaciones conocidas, como asignación de frecuencias, asignación de aulas, problemas de horarios (schedulling), entre otros.

En la práctica, no es difícil encontrar situaciones en donde el valor de k está dado, y el objetivo es minimizar algún tipo de *conflicto* entre los agentes representados por vértices en el grafo, pertenecientes a una misma clase de color. Un ejemplo directo de esto, es el problema de minimizar la interferencia en una k-asignación de frecuencias.

Con el objeto de abordar este tipo de problemas, proponemos una generalización del VCP, llamado el *problema de la mínima violación cromática* (MCVP), en el cual, dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de colores $\mathcal{C}$ y un subconjunto de aristas *débiles* $F \subseteq E$, se busca un $|\mathcal{C}|$-coloreo de $G' = (V, E \setminus F)$ que minimice el número de aristas de F con ambos extremos en la misma clase de color. Cuando $F = \emptyset$, entonces el MCVP es el problema de k-coloreo, y por lo tanto el MCVP es NP-Difícil. Más aún, el MCVP también generaliza el problema de k-partición, cuando $F = E$. Aunque ya existen algunos estudios poliedrales del problema de k-partición, encontramos diferencias significativas entre estos politopos y el caso general del MCVP.

Dado que las técnicas de programación entera han mostrado ser bastante exitosas para el VCP, proponemos encarar el MCVP con dichas técnicas. En tal sentido, en este trabajo comenzamos presentando una formulación como problema de programación entera para el MCVP y abordando un primer estudio poliedral del mismo. Más precisamente, damos caracterizaciones parciales de desigualdades que definen facetas y mostramos cómo están relacionadas las facetas de instancias más débiles y fuertes del MCVP (es decir, con más/menos aristas débiles). Introducimos un procedimiento general de *lifting* que genera desigualdades válidas (las cuales inducen facetas bajo ciertas hipótesis) a partir de desigualdades válidas genéricas y presentamos distintas familias de facetas, generadas por este procedimiento. Finalmente, mostramos una familia de facetas de tamaño exponencial, que no es obtenida por el mencionado procedimiento de lifting, asociada a cliques con todas sus aristas dbiles.

Referencias

[1] M. Campêlo, V. Campos and R. Corrêa, *On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem.* Discrete Applied Mathematics **156**-7 (2008) 1097–1111.

[2] M. Campêlo, R. Corrêa, and Y. Frota, *Cliques, holes and the vertex coloring polytope.* Inf. Process. Lett. **89**-4 (2004) 159–164.

[3] S. Chopra and M. R. Rao, *Facets ok The k-partition polytope.* Discrete applied mathematics **61**-1 (1995) 27–48.

[4] I. Méndez-Díaz and P. Zabala, *A branch-and-cut algorithm for graph coloring.* Discrete Applied Mathematics **154**-5 (2006) 826–847.

[5] I. Méndez-Díaz and P. Zabala, *A cutting plane algorithm for graph coloring.* Discrete Applied Mathematics **156**-2 (2008) 159–179.